第36卷 第6期 佛山科学技术学院学报(自然科学版) Vol.36 No.6
2018年11月 Journal of Foshan University (Natural Sciences Edition) Nov. 2018

文章编号:1008-0171(2018)06-0001-06

Iyengar型不等式的加权推广

曾志红[1],时统业[2*]

(1. 广东第二师范学院 学报编辑部,广东 广州 510303;2. 海军指挥学院,江苏 南京 211800)

摘要:在弱条件下用普通的数学分析方法给出Iyengar型不等式的几个加权推广。在权函数恒等于1时得到相关文献的结果。由此还可得到Iyengar型分数阶积分不等式。

关键词:Iyengar不等式;Iyengar型不等式;权函数

中图分类号:O178 文献标志码:A

DOI:10.13797/j.cnki.jfosu.1008-0171.2018.0103

1 引言和引理

1938年,Iyengar[1]证明了下面不等式,在一阶导数有界的情况下,给出由Hermite-Hadamard不等式的右边生成的差值的估计。

Iyengar不等式[2]671 设f是$[a,b]$上的可微函数,且对任意$x\in[a,b]$有$|f'(x)|\leqslant M$,则

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\leqslant\frac{1}{4}M(b-a)\left[1-\left(\frac{f(b)-f(a)}{M(b-a)}\right)^2\right]。$$

Hayashi不等式[2]684-685 设f在$[a,b]$上递减,g在$[a,b]$上勒贝格可积且$0\leq g(x)\leq M$,$x\in[a,b]$,则

$$M\int_{b-c}^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^{a+c}f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中$c=\frac{1}{M}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$。

1996年,Agarwal和Dragomir通过在Hayashi不等式中取$f(x)$和$g(x)$分别为$a-x$和$f'(x)-m$,给出在条件$m\leq f'(x)\leq M$时的Iyengar不等式,推广了在条件$|f'(x)|\leqslant M$时的Iyengar不等式。

定理[3] 设f是$[a,b]$上的可微函数,且对任意$x\in[a,b]$有$m\leqslant f'(x)\leqslant M$,$m<M$,则

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\leqslant\frac{[M(b-a)-f(b)+f(a)][f(b)-f(a)-m(b-a)]}{2(b-a)(M-m)}=$$
$$\frac{(M-m)(b-a)}{8}\left\{1-\frac{4}{(M-m)^2(b-a)^2}\left[f(a)-f(b)+\frac{M+m}{2}(b-a)\right]^2\right\}\leqslant\frac{(M-m)(b-a)}{8}。\qquad(1)$$

文献[4]利用Hayashi不等式,在弱条件

收稿日期:2018-06-15
基金项目:广东第二师范学院教授博士专项科研项目(2015ARF24)
作者简介:曾志红(1974-),女,广东梅州人,广东第二师范学院编审。
*通信作者:时统业(1963-),男,河北张家口人,海军指挥学院副教授。

$$m\leqslant\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant M,m\leqslant\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\leqslant M$$

情况下证明了不等式(1)。文献[5]在相同条件下,给出式(1)的另证。文献[6]给出不等式(1)的加权推广。刘证利用Hayashi不等式也将不等式(1)推广到加权形式[7]。与Iyengar型不等式有关的结果还可参见文献[8-12]。

本文将在弱条件下给出不等式(1)简单的加权推广,得到不同于文献[6-7]的结果。证明本文主要结果所用方法在文献[5,13]中都有体现,即先建立与区间任意点有关的不等式,然后决定函数的最值。文献[14]中定理7的证明和文献[15]中定理1的证明也都用这种方法。

2 主要结果

定理1 设f是$[a,b]$上的可积函数,存在常数$M>0$,使得

$$|f(x)-f(a)|\leq M(x-a),|f(x)-f(b)|\leq M(b-x),$$

g是$[a,b]$上正的可积函数,则有

$$-M\int_a^{c_0}(x-a)g(x)\mathrm{d}x-M\int_{c_0}^b(b-x)g(x)\mathrm{d}x+2M\int_{c_1}^{c_0}(x-c_1)g(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leq$$

$$M\int_a^{c_0}(x-a)g(x)\mathrm{d}x+M\int_{c_0}^b(b-x)g(x)\mathrm{d}x-2M\int_{c_2}^{c_0}(x-c_2)g(x)\mathrm{d}x,\tag{2}$$

其中c_0满足$\int_a^{c_0}g(x)\mathrm{d}x=\int_{c_0}^b g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,

$$c_1=\frac{a+b}{2}+d,c_2=\frac{a+b}{2}-d,d=\frac{f(a)-f(b)}{2M}。$$

证明 由已知条件得

$$f(a)-M(x-a)\leq f(x)\leq f(a)+M(x-a),\tag{3}$$

$$f(b)-M(b-x)\leq f(x)\leq f(b)+M(b-x),\tag{4}$$

将式(3)和式(4)乘以$g(x)$,然后分别在$[a,c]$和$[c,b]$上对x积分,相加得

$$\varphi(c):=f(a)\int_a^c g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_c^b g(x)\mathrm{d}x-M\int_a^c(x-a)g(x)\mathrm{d}x-M\int_c^b(b-x)g(x)\mathrm{d}x\leq$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leq f(a)\int_a^c g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_c^b g(x)\mathrm{d}x+M\int_a^c(x-a)g(x)\mathrm{d}x+M\int_c^b(b-x)g(x)\mathrm{d}x,$$

$$\varphi'(c)=g(c)[f(a)-f(b)-M(c-a)+M(b-c)]=2Mg(c)(c_1-c),$$

当$c\in[a,c_1]$时,$\varphi'(c)\geq 0$当$c\in[c_1,b]$时,$\varphi'(c)\leq 0$,故$\varphi(c)$在c_1处取得最大值,于是有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\geq\varphi(c_1),$$

$$\varphi(c_1)=\varphi(c_0)-\int_{c_1}^{c_0}\varphi'(x)\mathrm{d}x=\varphi(c_0)+2M\int_{c_1}^{c_0}(x-c_1)g(x)\mathrm{d}x=\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-M\int_a^{c_0}(x-a)g(x)\mathrm{d}x-$$

$$M\int_{c_0}^b(b-x)g(x)\mathrm{d}x+2M\int_{c_1}^{c_0}(x-c_1)g(x)\mathrm{d}x。$$

综合上面结果,则式(2)的左边部分得证。类似可证式(2)的右边部分。

注1 在定理1中,若取$g(x)\equiv 1$,则得到Iyengar不等式。

定理2 设f是$[a,b]$上的可积函数,存在常数$M>0$,$m>0$,使得

$$m(x-a)\leq f(x)-f(a)\leq M(x-a),m(b-x)\leq f(b)-f(x)\leq M(b-x),$$

g是$[a,b]$上正的可积函数,则有

$$-\frac{M-m}{2}\int_a^{c_0}(x-a)g(x)\mathrm{d}x-\frac{M-m}{2}\int_{c_0}^b(b-x)g(x)\mathrm{d}x+(M-m)\int_{c'_1}^{c_0}(x-c'_1)g(x)\mathrm{d}x\leq$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x-\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x-\frac{M+m}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)g(x)\,\mathrm{d}x\le$$

$$\frac{M-m}{2}\int_a^{c_0}(x-a)g(x)\,\mathrm{d}x+\frac{M-m}{2}\int_{c_0}^b(b-x)g(x)\,\mathrm{d}x-(M-m)\int_{c'_2}^{c_0}(x-c'_2)g(x)\,\mathrm{d}x,\tag{5}$$

其中 c_0 同定理 1,

$$c'_1=\frac{a+b}{2}+d',c'_2=\frac{a+b}{2}-d',d'=\frac{1}{M-m}\left[f(a)-f(b)+\frac{M+m}{2}(b-a)\right]。$$

证明　仿照文献[4]中定理 2 的方法即可证明。

注 2　在定理 2 中,若取 $g(x)\equiv 1$,则得到不等式(1)。

推论 1　设 f 条件同定理 2,g 是 $[a,b]$ 上正的可积函数,且关于 $\frac{a+b}{2}$ 对称,则有

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x-\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right|\le$$

$$(M-m)\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)g(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{d'}(d'-t)g\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\mathrm{d}t\right],$$

其中 d' 同定理 2。

证明　因为 g 关于 $\frac{a+b}{2}$ 对称,故 $c_0=\frac{a+b}{2}$,利用积分变量代换得

$$\int_{c'_1}^{c_0}(x-c'_1)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{d'}(d'-t)g\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\mathrm{d}t=\int_0^{d'}(d'-t)g\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\mathrm{d}t=\int_{c'_2}^{c_0}(x-c'_2)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

由式(5)则推论得证。

推论 2　设 f 条件同定理 2,则有

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\le$$

$$\frac{(M-m)(b-a)}{2(\alpha+1)}\left\{1-\frac{[f(a)-f(b)+M(b-a)]^{\alpha+1}+[f(b)-f(a)-m(b-a)]^{\alpha+1}}{(M-m)^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}}\right\}。$$

证明　在推论 1 中取 $g(x)=(x-a)^{\alpha-1}+(b-x)^{\alpha-1}$ 经简单计算可得证。

下面的推论改进了文献[16]给出的由 Fejér 右边不等式生成的差值的估计。

推论 3　设 f 是 $[a,b]$ 上的可微的凸函数,g 是 $[a,b]$ 上正的可积函数,且关于 $\frac{a+b}{2}$ 对称,则有

$$0\le\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\le[f'(b)-f'(a)]\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)g(x)\,\mathrm{d}x-$$

$$[f'(b)-f'(a)]\int_0^{d'}(d'-t)g\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\mathrm{d}t\le[f'(b)-f'(a)]\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 d' 同定理 2。

证明　因 f 是 $[a,b]$ 上的可微的凸函数,故有

$$f'(a)(x-a)\le f(x)-f(a)\le f'(b)(x-a),f'(a)(b-x)\le f(b)-f(x)\le f'(b)(b-x),$$

在推论 1 中,取 $M=f'(b)$,$m=f'(a)$,则推论 3 得证。

定理 3　设 f 是 $[a,b]$ 上的一阶可微函数,存在常数 $M>0$,使得

$$|f'(x)-f'(a)|\le M(x-a),|f'(x)-f'(b)|\le M(b-x),$$

g 是 $[a,b]$ 上正的可积函数,且关于 $\frac{a+b}{2}$ 对称,则有

$$-M\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2g(x)\,\mathrm{d}x+[f'(b)-f'(a)+M(b-a)]\int_{c_3}^{\frac{a+b}{2}}(x-c_3)g(x)\,\mathrm{d}x\le$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx+[f'(b)-f'(a)]\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)g(x)\,dx\le M\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2g(x)\,dx-$$

$$[f'(a)-f'(b)+M(b-a)]\int_{c_4}^{\frac{a+b}{2}}(x-c_4)g(x)\,dx,\tag{6}$$

也即

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx+[f'(b)-f'(a)]\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)g(x)\,dx+\right.$$

$$\frac{1}{2}[f'(a)-f'(b)+M(b-a)]\int_{c_4}^{\frac{a+b}{2}}(x-c_4)g(x)\,dx-$$

$$\left.\frac{1}{2}[f'(b)-f'(a)+M(b-a)]\int_{c_3}^{\frac{a+b}{2}}(x-c_3)g(x)\,dx\right|\le M\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2g(x)\,dx-$$

$$\frac{1}{2}[f'(a)-f'(b)+M(b-a)]\int_{c_4}^{\frac{a+b}{2}}(x-c_4)g(x)\,dx-$$

$$\frac{1}{2}[f'(b)-f'(a)+M(b-a)]\int_{c_3}^{\frac{a+b}{2}}(x-c_3)g(x)\,dx,$$

其中

$$c_3=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot\frac{f'(a)+f'(b)-2\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}{M(b-a)+f'(b)-f'(a)},$$

$$c_4=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\cdot\frac{f'(a)+f'(b)-2\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}{M(b-a)-f'(b)+f'(a)}。$$

证明 由已知条件得

$$f(a)+f'(a)(x-a)-\frac{M}{2}(x-a)^2\le f(x)\le f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{M}{2}(x-a)^2,\tag{7}$$

$$f(b)-f'(b)(b-x)-\frac{M}{2}(b-x)^2\le f(x)\le f(b)-f'(b)(b-x)+\frac{M}{2}(b-x)^2,\tag{8}$$

将式(7)和式(8)乘以 $g(x)$,然后分别在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上对 x 积分,相加得

$$\psi(c):=f(a)\int_a^c g(x)\,dx+f(b)\int_c^b g(x)\,dx+f'(a)\int_a^c(x-a)g(x)\,dx-f'(b)\int_c^b(b-x)g(x)\,dx-$$

$$\frac{M}{2}\int_a^c(x-a)^2g(x)\,dx-\frac{M}{2}\int_c^b(b-x)^2g(x)\,dx\le\int_a^b f(x)g(x)\,dx\le f(a)\int_a^c g(x)\,dx+f(b)\int_c^b g(x)\,dx+$$

$$f'(a)\int_a^c(x-a)g(x)\,dx-f'(b)\int_c^b(b-x)g(x)\,dx+\frac{M}{2}\int_a^c(x-a)^2g(x)\,dx+\frac{M}{2}\int_c^b(b-x)^2g(x)\,dx,$$

$$\psi'(c)=g(c)\left[f(a)-f(b)+(c-a)f'(a)+(b-c)f'(b)-\frac{M}{2}(c-a)^2+\frac{M}{2}(b-c)^2\right]=$$

$$[f'(a)-f'(b)-M(b-a)](c-c_3)g(c),$$

当 $c\in[a,c_3]$ 时,$\psi'(c)\ge 0$ 当 $c\in[c_3,b]$ 时,$\psi'(c)\le 0$,故 $\psi(c)$ 在 c_3 处取得最大值,于是有

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx\ge\psi(c_3),$$

$$\psi(c_3)=\psi\left(\frac{a+b}{2}\right)-\int_{c_3}^{\frac{a+b}{2}}\psi'(x)\,dx=\psi\left(\frac{a+b}{2}\right)+[M(b-a)-f'(a)+f'(b)]\int_{c_3}^{\frac{a+b}{2}}(x-c_3)g(x)\,dx=$$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx+[f'(a)-f'(b)]\int_a^b(x-a)g(x)\,dx-M\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2g(x)\,dx+$$

$$[M(b-a)-f'(a)+f'(b)]\int_{c_3}^{\frac{a+b}{2}}(x-c_3)g(x)\,dx,$$

综合上面结果，则式(6)的左边部分得证。类似可证式(6)的右边部分。

注3　若$|f''(x)|\le M$，则f满足定理3条件，取$g(x)\equiv 1$，则有[2]674

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]+\frac{1}{8}(1+Q^2)(b-a)[f'(b)-f'(a)]\right|\le\frac{M(b-a)^2}{24}(1-3Q^2),$$

其中$Q^2=\dfrac{\left[f'(a)+f'(b)-2\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\right]^2}{M^2(b-a)^2-[f'(b)+f'(a)]^2}$。

推论4　设f满足定理3的条件，且$f'(a)=f'(b)$，则

$$\left|\int_a^b g(x)f(x)\,dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx\right|\le M\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2 g(x)\,dx-M(b-a)\int_0^d(d-t)g\left(\frac{a+b}{2}+t\right)dt,$$

其中$d=\dfrac{f(a)-f(b)+(b-a)f'(a)}{M(b-a)}$。

证明　当$f'(a)=f'(b)$时，$c_3=\dfrac{a+b}{2}+d$，$c_4=\dfrac{a+b}{2}-d$，

$$\int_{c_3}^{\frac{a+b}{2}}(x-c_3)g(x)\,dx=\int_0^d(d-t)g\left(\frac{a+b}{2}+t\right)dt=\int_0^d(d-t)g\left(\frac{a+b}{2}-t\right)dt=\int_{c_4}^{\frac{a+b}{2}}(x-c_4)g(x)\,dx,$$

利用定理3则推论4得证。

推论5　设f的条件同定理3，$\alpha>0$，则有

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}[J_{a^+}^\alpha f(b)+J_{b^-}^\alpha f(a)]\right|-\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{2^\alpha-1+\alpha(\alpha+1)}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}[f'(b)-f'(a)](b-a)+$$

$$\frac{(b-a)}{2^{\alpha+3}(\alpha+1)}\left\{\frac{[M(b-a)+P_1]^{\alpha+1}+[M(b-a)-P_2]^{\alpha+1}}{[M(b-a)+f'(a)-f'(b)]^\alpha}-\frac{[M(b-a)+P_2]^{\alpha+1}+[M(b-a)-P_1]^{\alpha+1}}{[M(b-a)+f'(b)-f'(a)]^\alpha}\right\}\le$$

$$\frac{M(b-a)^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}-\frac{b-a}{2^{\alpha+3}(\alpha+1)}\left\{\frac{[M(b-a)+P_1]^{\alpha+1}+[M(b-a)-P_2]^{\alpha+1}}{[M(b-a)+f'(a)-f'(b)]^\alpha}+\frac{[M(b-a)+P_2]^{\alpha+1}+[M(b-a)-P_1]^{\alpha+1}}{[M(b-a)+f'(b)-f'(a)]^\alpha}\right\},$$

其中$P_1=2f'(a)-2\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$，$P_2=2f'(b)-2\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$。

证明　在定理3中取$g(x)=(x-a)^{\alpha-1}+(b-x)^{\alpha-1}$经简单计算可得证。

定理4　设f是$[a,b]$上的一阶可微函数，存在常数$M>0$，$m>0$，使得

$$m(x-a)\le f'(x)-f'(a)\le M(x-a),\quad m(b-x)\le f'(b)-f'(x)\le M(b-x),$$

g是$[a,b]$上正的积函数，且关于$\dfrac{a+b}{2}$对称，则有

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx-\frac{M+m}{2}\int_a^b\left(x^2-\frac{a^2+b^2}{2}\right)g(x)\,dx+\right.$$

$$\left[f'(b)-f'(a)-\frac{M+m}{2}(b-a)\right]\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)g(x)\,dx+$$

$$\frac{1}{2}[f'(a)-f'(b)+M(b-a)]\int_{c'_4}^{\frac{a+b}{2}}(x-c'_4)g(x)\,dx-$$

$$\left.\frac{1}{2}[f'(b)-f'(a)-m(b-a)]\int_{c'_3}^{\frac{a+b}{2}}(x-c'_3)g(x)\,dx\right|\le\frac{M-m}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2g(x)\,dx-$$

$$\frac{1}{2}[f'(a)-f'(b)+M(b-a)]\int_{c'_4}^{\frac{a+b}{2}}(x-c'_4)g(x)\,dx-\frac{1}{2}[f'(b)-f'(a)-m(b-a)]\int_{c'_3}^{\frac{a+b}{2}}(x-c'_3)g(x)\,dx,$$

其中

$$c'_3=\frac{f(a)-f(b)-af'(a)-bf'(b)-\frac{m}{2}(b^2-a^2)}{f'(b)-f'(a)-m(b-a)},$$

$$c'_4=\frac{f(b)-f(a)+af'(a)-bf'(b)+\frac{M}{2}(b^2-a^2)}{f'(a)-f'(b)+M(b-a)}。$$

证明 仿照文献[5]中定理4的方法即可证明。

参考文献:

[1] IYENGAR K S K. Note on an inequality[J]. Math Student, 1938, 6(1): 75-76.

[2] 匡继昌. 常用不等式[M]. 4版. 济南: 山东科学技术出版社, 2010: 671-685.

[3] AGARWAL R P, DRAGOMIR S S. An application of Hayashi's inequality for differentiable functions[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1996, 32(6): 95-99.

[4] ELEZOVIĆ N, PEČARIĆ J. Stefenssen's inequality and estimates of error in trapezoidal rule [J]. Applied mathematics letters, 1998, 11(6): 63-69.

[5] LIU Z. Note on Iyengar's inequality[J]. Publikacije Elektrotehničkog Fakulteta Serija Matematika, 2005, 16: 29-35.

[6] VASIĆ P M, MILOVANOVIĆ G V. On an inequality of Iyengar[J]. Publikacije Elektrotehničkog Fakulteta Serija Matematika i Fizika, 1976 (544/576): 18-24.

[7] LIU Z. On a trapezoidal type rule for weighted integrals[J]. Tamkang Journal of Mathematics, 2004, 35(3): 227-234.

[8] DRAGOMIR S S, WANG S. Applications of Iyengar's type inequalities to the estimation of error bounds for the trapezoidal quadrature rule[J]. Tamkang Journal of Mathematics, 1998, 29(1): 55-58.

[9] CERONE P, DRAGOMIR S S. On a weighted generalization of Iyengar type inequalities involving bounded first derivative[J]. Mathematical Inequalities and Applications, 1999, 3(1): 35-44.

[10] SARIKAYA M Z. On weighted Iyengar type inequalities on time scales [J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(9): 1340-1344.

[11] LIU W, NGÔ Q A. Some Iyengar-type inequalities on time scales for functions whose second derivatives are bounded[J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 216(11): 3244-3251.

[12] SARIKAYA M Z, YALDIZ H, BUDAK H. On weighted Iyengar-type inequalities for conformable fractional integrals[J]. Mathematical Sciences, 2017, 11(4): 327-331.

[13] 石艳霞, 刘证. 关于Iyengar型积分不等式[J]. 鞍山科技大学学报, 2003, 26(1): 57-60.

[14] 时统业, 秦华, 吴涵. 平方凸函数Hermite-Hadamard型不等式的改进[J]. 大学数学, 2018, 34(1): 70-76.

[15] 时统业, 周国辉. 指数凸函数算术平均值下界的改进[J]. 杭州师范大学学报(自然科学版), 2018, 17(1): 108-112.

[16] 时统业. 关于加权Hermite-Hadamard不等式[J]. 湖南理工学院学报(自然科学版), 2012, 25(1): 8-11.

【责任编辑:王桂珍 foshanwgzh@163.com】

Weighted extensions of Iyengar type inequalities

ZENG Zhi-hong[1], SHI Tong-ye[2]

(1. Editorial Department of Journal, Guangdong University of Education, Guangzhou 510303, China;
2. PLA Naval Command College, Jiangsu 211800, China)

Abstract: Some weighted generalizations of Iyengar type inequalities are given by ordinary mathematical analysis under weak conditions. The results of the relevant literatures are obtained when the weight function is equal to 1. Iyengar type fractional integral inequalities are also obtained from the results of this paper.

Key words: Iyengar inequality; Iyengar type inequality; weighted function